Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Гимназия № 53» г. Пензы

Уникальная пара треугольников

Выполнила Щенникова Анжелика,
Ученица 9 класса
Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Монахова Оксана Александровна
доцент ПГУ

Пенза, 2020

Оглавление

Введение

Треугольник – одна из важнейших фигур в геометрии. Эта фигура обладает неисчерпаемым количеством различных свойств, которые, порой, можно рассматривать бесконечно.

Представленная работа посвящена изучению свойств пары не совсем обычных треугольников. По условию, один из них равнобедренный, другой прямоугольный. Они имеют равные периметры, площади, а также целочисленные стороны. Нам неизвестно, кто, когда и зачем придумал эту задачу. Но смело можно утверждать, что изучение геометрических форм представляло большой интерес для математиков со времен Древней Греции, и возможность использовать проверенные методы для оценки площади и периметра являлось большим преимуществом в таких практических областях, как скульптура, инженерия и архитектура.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования уникальных свойств треугольников в конструировании. В частности, рассмотрим такой пример: первое, на что стоит обратить внимание – это равенство площадей треугольников пары. Их схожесть может гарантировать то, что, если изготовить по форме треугольников солнечные батареи, то они будут потреблять одинаковое количество солнечной энергии.

Затем стоит обратить внимание на периметр: на такие батареи можно будет установить одинаковое количество аккумуляторов для равной подачи энергии. Такие солнечные батареи можно установить, например, на крыши разных зданий с одинаковым потреблением электричества, или на космические станции, под разным углом, за счет разного центра тяжести.

Задача о нахождении всех пар треугольников равнобедренного и прямоугольного, с целочисленными сторонами, одинаковой площади и периметра, до сих пор признается некоторыми учеными нерешенной, что подтверждает ее ***актуальность.*** В частности, решению этой задачи посвящена работа 2018 года «A unique pair of triangles» Yoshinosuke Hirakawa, Hideki Matsumura [1], в которой авторы доказывают уникальность пары треугольников, с заданными свойствами. Вопросу единственности такой пары треугольников был посвящен доклад доктора физико-математических наук Шелехова Александра Михайловича, представленный в рамках Международного геометрического семинара имени Г.Ф. Лаптева «Лаптевские чтения – 2020», программа семинара представлена в приложении. А.М. Шелехов в своем докладе называл эти треугольники «японскими» и задачу о существовании пар таких треугольников – «японской задачей».

Цель работы – изучить некоторые геометрические свойства пары треугольников (прямоугольного и равнобедренного) с равными площадями, равными периметрами, целочисленными сторонами.

Задачи, решенные в работе:

1. Составлена и частично исследована система уравнений, описывающая пару треугольников (прямоугольного и равнобедренного) с равными площадями, равными периметрами, целочисленными сторонами.

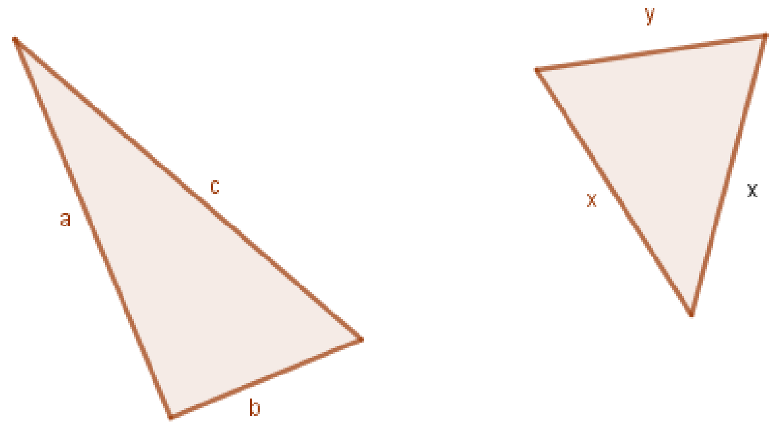
2. Найдены радиусы вписанных окружностей в эти треугольники. Доказано, что для любой пары целочисленных треугольников (равнобедренного и прямоугольного) с равными площадями и периметрами, радиусы вписанных окружностей являются целыми числами, равными между собой.

3. Найдены радиусы описанных окружностей около этих треугольников. Показано, что в общем случае эти радиусы различны и не являются целыми числами.

4. Найдены радиусы их вневписанных окружностей. Доказано, что для прямоугольных треугольников с целыми сторонами радиусы вневписанных окружностей являются целыми числами. Показано, что в общем случае эти радиусы для прямоугольных и равнобедренных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи, различны.

1. Постановка задачи о треугольниках

Рассмотрим два треугольника: прямоугольный, с катетами a, b, гипотенузой c, и равнобедренный со сторонами x, x, y. Стороны треугольников должны быть натуральными числами, площади и периметры этих треугольников должны совпадать.



Используя известные формулы, связывающие стороны этих треугольников можно записать систему уравнений, которой они удовлетворяют на основе равенства площадей и периметров, а также соотношений между сторонами самих треугольников..

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ 2ab = y\sqrt{4x^2 - y^2}, \\ 2x + y = a + b + c. \end{cases} \tag{1}$$

Задача о треугольниках сводится к нахождению всех натуральных решений этой системы (1). Проведем исследование системы на предмет четности ее решений.

Обратим внимание на второе уравнение системы (1). В левой части второго уравнения находится целое четное число $2ab$, значит, в правой части второго уравнения должно быть целое четное число. Так как y – целое число, то $\sqrt{4x^2 - y^2}$ должно быть рациональным числом. В противном случае, произведение целого и иррационального числа не является рациональным. В силу того, что x, y – целые числа, рациональное число $\sqrt{4x^2 - y^2}$ должно быть целым. Число y, должно быть четным, иначе правая часть не будет четным числом. Так как разность четного и нечетного чисел является нечетным числом, корень квадратный из нечетного числа, если является целым, то нечетное число.. Подставим $y = 2y_1$ во второе уравнение этой системы, преобразуем: $2ab = 2y_1\sqrt{4x^2 - 4{y_1}^2}$, отсюда получим $ab = 2y_1\sqrt{x^2 - {y_1}^2}$, значит, произведение ab – четное.

Хотя бы один из катетов прямоугольного треугольника, удовлетворяющего системе (1), должен быть четным.

Из последнего равенства системы (1) $2x + y = a + b + c = 2x + 2y_1$, следует, что ***сумма $a + b + c$ сторон прямоугольного треугольника, удовлетворяющего системе (1), должна быть четной***.

Известно, [1], что существует пара, состоящая из прямоугольного треугольника и рационального равнобедренного треугольника, которые имеют одинаковый периметр и одинаковую площадь. Эта пара состоит из прямоугольного треугольника со сторонами длиной (377, 135, 352) и равнобедренного треугольника со сторонами длиной (366, 366, 132) Не существует пары примитивного прямоугольного треугольника и примитивного равнобедренного треугольника с одинаковым периметром и одинаковой площадью. Примитивный треугольник - это целочисленный треугольник, у которого наибольший общий делитель длин сторон равен 1.

Аспирант третьего курса Ёсиносуке Хиракава и докторант второго курса Хидеки Мацумура, члены Института чистых и прикладных наук Кейо, 26 сентября 2018 года, успешно доказали существование такой пары в своей диссертации под названием «Уникальная пара треугольников» [1].

Доказательство того, что они образуют единственную пару треугольников с желаемыми свойствами, получено методами алгебраической геометрии с использованием компьютерной программы.

В процессе доказательства они определили множество рациональных точек на некоторой гиперэллиптической кривой с помощью метода 2-спуска на ее якобиевом многообразии и теории интегралов Колемана.

Центральный вопрос в этой задаче состоит в том, как определить, имеет ли данная система уравнений (1) какие-либо решения, которые являются целыми или рациональными числами, и если да, то сколько?

Как следует из доклада Шелехова Александра Михайловича убедительного доказательства единственности пары треугольников, удовлетворяющей системе (1), до сих пор не представлено, вопрос остается пока открытым.

С другой стороны, без требования, чтобы треугольники были прямоугольными или равнобедренными, существует бесконечно много пар рациональных треугольников с одинаковыми периметрами и площадями.

2. Геометрические свойства треугольников

Будем использовать следующие обозначения x- боковые стороны равнобедренного треугольника, y - его основание, a - больший катет, b - меньший катет, c- гипотенуза, p – полупериметр этих треугольников, S –площадь этих треугольников.

Для уникальной пары треугольников: прямоугольного треугольника со сторонами длиной (377, 135, 352) и равнобедренного треугольника со сторонами длиной (366, 366, 132) площадь равна S = 23760, полупериметр равен p = 432.

2.1.Вписанные окружности

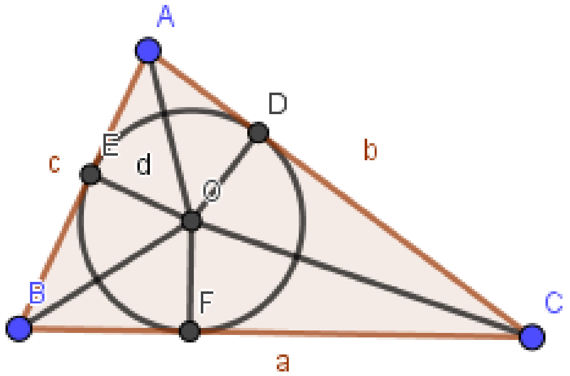
Окружностью, вписанной в треугольник, называют окружность, которая касается всех сторон треугольника. Известно, что в любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну. Центром вписанной в треугольник окружности является точка, в которой пересекаются все биссектрисы треугольника.

Теорема. В любом треугольнике все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Рассмотрим две биссектрисы, проведённые из вершин A и C треугольника ABC, и обозначим точку их пересечения буквой O.

Опустим из точки O перпендикуляры OD,OE и OF на стороны треугольника. Поскольку точка O лежит на биссектрисе угла BAC, то эта точка равноудалена от сторон этого угла, справедливо равенство: $OD = OE$. Поскольку точка O лежит на биссектрисе угла ACB, то справедливо равенство: $OD = OF$. Следовательно, справедливо равенство: $OE = OF$, откуда заключаем, что точка O лежит на биссектрисе угла ABC. Таким образом, все три биссектрисы треугольника проходят через одну и ту же точку, что и требовалось доказать. Отметим также, что $OD = OE = OF = r$ – радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.



Теорема. Радиус вписанной окружности можно найти по формуле $r = \frac{S}{p}$.

Доказательство.

Перпендикуляры OD,OE и OF на стороны треугольника являются высотами в треугольниках AOC, AOB, BOC соответственно. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOC, AOB, BOC. Вычислим площади треугольников AOC, AOB, BOC, получим

$$S_{ABC} = S_{AOC} + S_{AOB} + S_{BOC} = ½(OD \cdot AC + OE \cdot AB + OF \cdot BC) = r \cdot p,$$

где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника. Отсюда следует , что $r = \frac{S}{p}$., что и требовалось доказать.

Известно, что площади и периметр данных треугольников равны, следовательно, можно утверждать, что радиусы их вписанных окружностей равны, и равны 55.

Предыдущие теоремы и рассуждения позволили нам сформулировать и доказать общее свойство всех треугольников, описываемых системой (1).

Теорема. *Радиусы вписанных окружностей для любой пары треугольников прямоугольного и равнобедренного с целочисленными сторонами, с равными площадью и периметром, являются целыми числами и равны для этой пары треугольников.*

Доказательство.

1. Так как радиус вписанной окружности треугольника вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p}$. Равенство радиусов следует из равенства площадей и периметров треугольников пары.

2. Докажем целочисленность радиуса вписанной окружности. Выразим радиус вписанной окружности через стороны прямоугольного треугольника. $r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c}$. Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение $(a + b - c)$, раскроем скобки и упростим дробь.

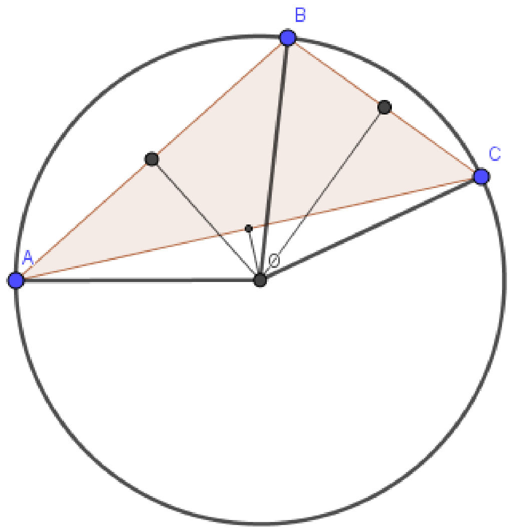
$$r = \frac{S}{p} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Ранее мы выяснили, что сумма сторон прямоугольного треугольника, удовлетворяющего системе (1) – четное число. Если оба катета четные числа, то гипотенуза этого треугольника – четное число. Если оба катета нечетны, то их сумма и разность – четное число, и гипотенуза – четное число. Если только один из катетов – четное число, тогда сумма и разность второго катета с гипотенузой – число четное. Следовательно, и число $a+b-c$ должно быть четным, отсюда $r=\frac{a+b-c}{2}$ является целым числом.

2.2.Описанные окружности

Окружностью, описанной около треугольника, называют окружность, проходящую через все три вершины треугольника. В этом случае треугольник называют треугольником, вписанным в окружность, или вписанным треугольником.

Около любого треугольника можно описать окружность. Центром описанной около треугольника окружности является точка, в которой пересекаются все серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника.



Теорема. Все серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам произвольного треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Рассмотрим два серединных перпендикуляра, проведённых к сторонам *AC* и *AB* треугольника *ABC*, и обозначим точку их пересечения буквой *O*. Поскольку точка *O* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AC*, то эта точка равноудалена от концов этого отрезка, справедливо равенство: *CO* = *AO*. Поскольку точка *O* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*, то справедливо равенство: *AO* = *BO*. Следовательно, справедливо равенство: *CO* = *BO*, откуда заключаем, что точка *O* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *BC*. Таким образом, все три серединных перпендикуляра проходят через одну и ту же точку, что и требовалось доказать.

При доказательстве теоремы было получено равенство: *AO* = *OB* = *OC*, из которого вытекает, что окружность с центром в точке *O* и радиусами *OA*, *OB*, *OC* проходит через все три вершины треугольника *ABC*.

Теорема. Площадь треугольника можно найти по формуле $S = \frac{abc}{4R}$, где $a,\ b,\ c$ – стороны треугольника, а R – радиус описанной окружности.

Доказательство.

Из теоремы синусов для треугольника ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, справедливо равенство $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$ Используем равенство $\frac{c}{\sin C} = 2R$, из которого следует, что $\sin C = \frac{c}{2R}$. По формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R}$.

Тогда радиусы описанных окружностей можно найти по формуле $R = \frac{abc}{2ab} = \frac{1}{2}$c для прямоугольного треугольника. Отсюда получим, что радиус описанной окружности около прямоугольного треугольника в уникальной паре равен числу 188.5.

Радиус будет целым в случае четности гипотенузы. Из общей формулы для равнобедренного треугольника получится формула вычисления радиуса описанной окружности $R = \frac{x^2 y}{4S}$ Тогда радиус описанной окружности для равнобедренного треугольника в уникальной паре равен числу 186.05. Полученные значения радиусов описанных окружностей не совпадают. Но для уникальной пары треугольников они выражаются конечными десятичными дробями.

Вывод: радиусы описанных окружностей около пары треугольников (равнобедренного и прямоугольного с равными площадями и периметрами, целочисленными сторонами) в общем случае не совпадают и не являются целыми числами.

2.3.Вневписанные окружности

Вневписанная окружность треугольника - окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон. У любого треугольника существует три вневписанных окружности.

Существование и единственность вневписанной окружности обусловлены тем, что биссектрисы двух внешних углов треугольника и биссектриса внутреннего угла, не смежного с этими двумя, пересекаются в одной точке, которая и является центром такой окружности.

Теорема. В любом треугольнике биссектрисы двух внешних углов и биссектриса внутреннего угла, несмежного с ними, пересекаются в одной точке.

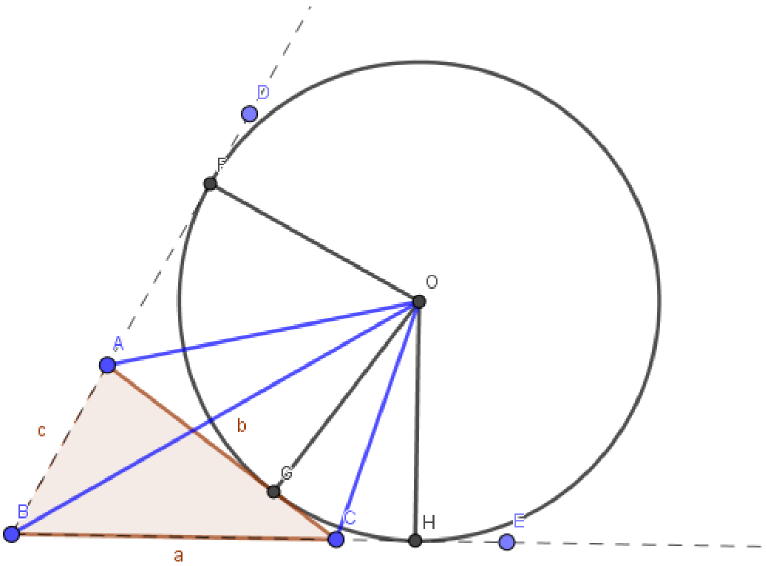
Доказательство.

Рассмотрим произвольный треугольник *ABC* и продолжим, например, стороны *BA* и *BC* за точки *A* и *C* соответственно.

Проведём биссектрисы углов *DAC* и *ECA*, которые являются внешними углами треугольника *ABC*. Обозначим точку пересечения этих биссектрис буквой *O*. Докажем, что точка *O* лежит на биссектрисе угла *ABC*, который является внутренним углом треугольника *ABC*, не смежным с внешними углами *DAC* и *ECA*.

С этой целью опустим из точки *O* перпендикуляры *OF, OG* и *OH* на прямые *AB, AC* и *BC* соответственно. Поскольку *AO* – биссектриса угла *DAC,* то справедливо равенство: *OF = OG*. Поскольку *CO* – биссектриса угла *ACE*, то справедливо равенство: *OF = OG,* Следовательно, справедливо равенство *OG = OH,* откуда вытекает, что точка *O* лежит на биссектрисе угла *ABC*, что и требовалось доказать.

Заметим, что $OF = OG = OH = r_b$ –радиус вневписанной окружности, касающейся стороны $AC = b$.



Теорема. Радиус вневписанной окружности, касающейся стороны i треугольника, можно найти по формуле $r_i = \frac{S}{p-i}$, где S – площадь треугольника, p – полупериметр треугольника, i – длина стороны, которой касается вневписанная окружность радиуса r_i .

Доказательство.

Рассмотрим треугольник *ABC*, его площадь можно найти как сумму площадей треугольников *BFO* и *BHO*, минус площади треугольников *AFO*, *AGO*, *CGO*, *CHO*. Обозначим радиус вневписанной окружности, касающейся стороны b треугольника r_b. Получим,

$$S_{ABC} = S_{BFO} + S_{BHO} - S_{AFO} - S_{AGO} - S_{CGO} - S_{CHO} =$$

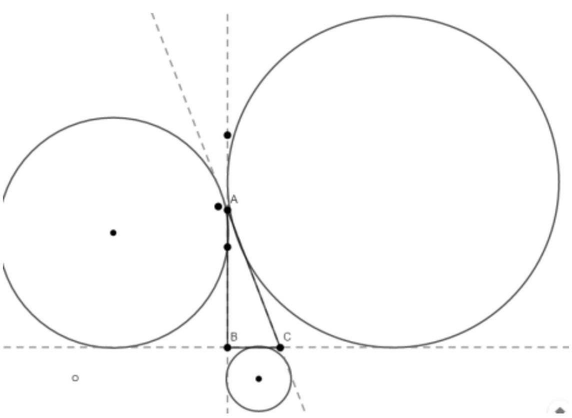
$$= \frac{1}{2} r_b BF + \frac{1}{2} r_b BH - \frac{1}{2} r_b AF - \frac{1}{2} r_b AG - \frac{1}{2} r_b.CG - \frac{1}{2} r_b.CH =$$

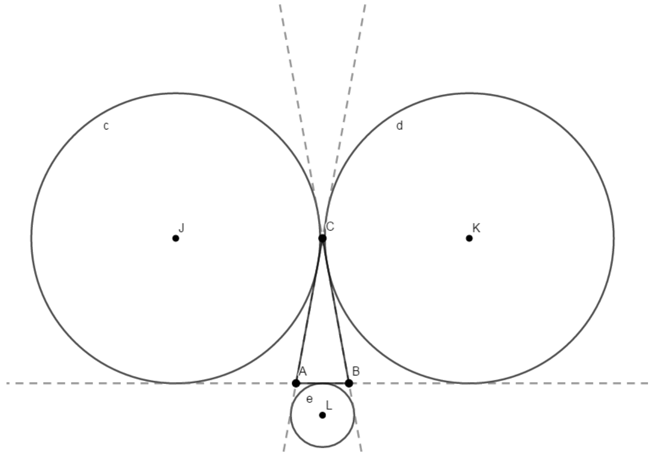
$$= \frac{1}{2} r_b (BF + .BH - .AF - AG - .CG - .CH).$$

Учтем следующие равенства $BF - .AF = BA = c$, $BH - .CH = BC = a$, $-AG - CG = -b$.

Окончательно получим, $S_{ABC} = \frac{1}{2} r_b(c + a - b) = r_b \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) = r_b(p - b)$. Отсюда следует формула $r_i = \frac{S}{p-i}$.

Следовательно, радиусы вневписанных окружностей будут равны для равнобедренного треугольника: $r_x = 360$, $r_y = 79{,}2$, для прямоугольного треугольника $r_a = 297$, $r_b = 80$, $r_c = 432$.





Теорема. *Радиусы всех трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с целыми сторонами являются целыми числами. В общем случае они не совпадают с радиусами вневписанных окружностей для равнобедренного треугольника с целыми сторонами, площади и периметры которого равны площади и периметру прямоугольного треугольника с целыми сторонами.*

Доказательство.

Покажем, что радиусы вневписанных окружностей являются целыми числами для прямоугольных треугольников с целыми сторонами.

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{ab}{a+b+c-2a} = \frac{ab}{-a+b+c} = \frac{ab(-a+b-c)}{(-a+b)^2-c^2} = \frac{ab(-a+b-c)}{a^2+b^2-2ab-c^2}.$$

Учитывая, что $a^2+b^2=c^2$, получим, $r_a = \frac{ab(-a+b-c)}{-2ab} = \frac{a-b+c}{2}$. Как уже отмечалось выше, из системы (1), описывающей стороны треугольников, следует, что сумма $(a+b+c)$ сторон прямоугольного треугольника, является числом четным. Следовательно, число $(a-b+c)$ также является числом четным, и радиус $r_a = \frac{a-b+c}{2}$ вневписанной окружности, касающейся стороны a, является целым числом.

Аналогично, доказывается, что радиусы вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон прямоугольного треугольника, являются целыми числами.

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \frac{ab}{a+b+c-2b} = \frac{ab}{a-b+c} = \frac{ab(a-b-c)}{(a-b)^2-c^2} = \frac{-a+b+c}{2}.$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \frac{ab}{a+b+c-2c} = \frac{ab}{a+b-c} = \frac{ab(a+b+c)}{(a+b)^2-c^2} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Вывод: неизвестно, уникальна ли пара треугольников, состоящая из прямоугольного и равнобедренного треугольника с целыми сторонами, равными площадями и периметрами, удовлетворяющая системе (1), но у пар этих треугольников есть похожие свойства. Изучение геометрических свойств треугольников, удовлетворяющих системе (1), позволит получить однозначный ответ об уникальности найденной пары треугольников, или может помочь найти другие пары таких треугольников.

Список использованной литературы

1. Yoshinosuke Hirakawa, Hideki Matsumura A unique pair of triangles // Journal of Number Theory (published online on August 24, 2018)// arXiv:1809.09936 [math.NT].
2. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. В 2 т. — М.: МЦНМО, 2004.

Приложение

Пензенский государственный университет
Педагогический институт имени В.Г. Белинского
Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра «Математическое образование»

Международный геометрический семинар
имени Г.Ф. Лаптева

Лаптевские чтения – 2020

ПРОГРАММА

г. Пенза
24 – 25 сентября 2020 г.

Организационный комитет

Председатель оргкомитета — заведующий кафедрой «Математическое образование», к.ф.-м.н., профессор Паньженский В.И.

1. Гусева Н.И., к.ф.-м.н., доцент (Московский педагогический государственный университет, кафедра геометрии).
2. Сорокина М.В., к.ф.-м.н., доцент (Пензенский государственный университет, кафедра «Математическое образование»).
3. Растрепина А.О. (Пензенский государственный университет, кафедра «Математическое образование»).

Секретарь оргкомитета – Сурина О.П., к.ф.-м.н., доцент, директор Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета.

Программный комитет

1. Лычагин В.В., д.ф.-м.н., профессор (University Tromso, Norway).
2. Кушнер А.Г., д.ф.-м.н., профессор (Московский государственный университет им.М.В. Ломоносова).
3. Микеш Й., д.ф.-м.н., профессор (Palacky University, Olomouc, Czech Republic).
4. Степанов С.Е., д.ф.-м.н., профессор (Финансовый университет при Правительстве РФ).
5. Шелехов А.М., д.ф.-м.н., профессор (Московский государственный педагогический университет).
6. Шурыгин В.В., д.ф.-м.н., профессор (Казанский (Приволжский) федеральный университет).

Вечернее заседание

13:30 – 14:00	Регистрация участников семинара.
Идентификатор	792 782 0276
Код доступа	743669
Приглашение	Вход по ссылке
14:00 – 14:30	*Шурыгин Вадим Васильевич* (Казанский (Приволжский) федеральный университет) «Структуры гладких многообразий над алгеброй дуальных чисел на аффинных расслоениях над аффинными многообразиями»
14:35 – 14:55	*Кушнер Алексей Гурьевич* (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова) «Классификация уравнений Монжа-Ампера с помощью контактных преобразований»
15:00 – 15:30	*Шелехов Александр Михайлович* (Московский педагогический государственный университет) «Обобщенная теорема о границах криволинейной три-ткани и ее приложения».
15:35 – 15:55	*Шелехов Александр Михайлович* (Московский педагогический государственный университет) «Об одной «японской» задаче».
16:00 – 16:30	*Миловидов Алексей Евгеньевич* (Тверской государственный университет) «Геометрические свойства треугольников в "японской" задаче».
16:35 – 16:55	*Сурина Ольга Петровна* (Пензенский государственный университет) «О конформно-келлеровой структуре на касательном расслоении финслерова пространства».
17:00 – 17:30	*Сорокина Марина Валерьевна* (Пензенский государственный университет) «Инфинитезимальные автоморфизмы почти симплектической структуры на касательном расслоении обобщенного лагранжева пространства».
17:35 – 17:55	*Якунина Ольга Владимировна* (Пензенский государственный университет) «Оценка скалярной кривизны касательного расслоения со специальной римановой метрикой структуры почтипроизведения».
17:55 – 18:00	Закрытие семинара.

Рецензия

на учебно-исследовательскую работу

ученицы 9 класса МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы

Щенниковой Анжелики «Уникальная пара треугольников»

Представленная работа посвящена изучению свойств пары треугольников. По условию, один из них равнобедренный, другой прямоугольный. Они имеют равные периметры, площади, а также целочисленные стороны.

Задача о нахождении всех пар треугольников равнобедренного и прямоугольного, с целочисленными сторонами, одинаковой площади и периметра, до сих пор признается некоторыми учеными нерешенной, что подтверждает ее актуальность.

Задачи, решенные в работе:

1. Составлена и частично исследована система уравнений, описывающая пару треугольников (прямоугольного и равнобедренного) с равными площадями, равными периметрами, целочисленными сторонами.
2. Найдены радиусы вписанных окружностей в эти треугольники. Доказано, что для любой пары целочисленных треугольников (равнобедренного и прямоугольного) с равными площадями и периметрами, радиусы вписанных окружностей являются целыми числами, равными между собой.
3. Найдены радиусы описанных окружностей около этих треугольников. Показано, что в общем случае эти радиусы различны и не являются целыми числами.
4. Найдены радиусы их вневписанных окружностей. Доказано, что для прямоугольных треугольников с целыми сторонами радиусы вневписанных окружностей являются целыми числами. Показано, что в общем случае эти радиусы для прямоугольных и равнобедренных треугольников, удовлетворяющих условиям задачи, различны.

Изучение геометрических свойств треугольников, позволит получить однозначный ответ об уникальности найденной пары треугольников, или может помочь найти другие пары таких треугольников.

Считаю, что работа может быть представлена для участия в научно-практической конференции.

Научный руководитель

кандидат физ.-мат. наук

доцент кафедры «Математическое образование» ПГУ Монахова О.А.

Подпись О.А.Монаховой заверяю.

Директор МБОУ «Гимназия №53» г. Пензы Р.В.Наумова